

Additional Mathematics

คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3

สมบัติเลขยกกำลัง

ชื่อ .....

ชั้น ..... เลขประจำตัว .....

โรงเรียน .....

ครูผู้สอน....

พิชญุตม์ ราชเดิม(PunPitchy)

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ Best Friend Forever School

3.1 นิยามและความหมายของเลขยกกำลัง

a^n หรือ a ที่มี n ตัวเล็กห้อยด้านบน อ่านว่า a ยกกำลัง n หมายถึงเลขยกกำลังที่มี a เป็นฐาน และ n เป็นเลขชี้กำลัง แปลว่า a คูณกัน n ครั้ง โดยที่ a เป็นจำนวนจริง ใดๆ และ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ หาก n เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นจำนวรเต็มจะเป็นการยกกำลังที่หาผลลัพธ์ไม่ได้หรือยากหรือผลลัพธ์เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นจำนวนเต็ม

Ex)
2^4 = 2•2•2•2 = 16
3^7 = 3•3•3•3•3•3•3 = 2187
10^4 = 10•10•10•10 = 10000
(5+3)^ 3 = (5+3)(5+3)(5+3) = 8•8•8 = 512

3.2 สมบัติพื้นฐานของเลขยกกำลัง

1) ฐานเดียวกันคูณกันเลขชี้กำลังจะบวกกัน

Ex1) a^5•a^(-2)

= a^(5+(-2))

= a^(5-2)

= a^3

Ex2) 2^2•3^4•3^2

= 2^2•3^(4+2)

= 4•3^6

= 4•729

= 2916

2) ฐานเดียวกันหารกันเลขชี้กำลังลบกัน

Ex1) a^5/a^3

= a^(5-3)

= a^2

Ex2) x^2•y^4/x^(-2)•y^3

= x^(2-(-2))•y^(4-3)

= x^(2+2)•y^1

= x^4•y

สมบัติเลขยกกำลังหน้าที่ 3

3) เลขยกกำลังซ้อนกัน มี 2 รูปแบบ

3.1) ซ้อนกันแบบมีวงเล็บเช่น (a^m)^n อ่านว่า a ยกกำลัง m ทั้งหมด ยกกำลัง n ซึ่งเลขชี้กำลังจะคูณกัน หรือ (a^m)^n = a^(m•n)
เหตุผล คือ สมมติ หากเราแทน a m n ด้วย 3 2 2 ตามลำดับ
จะได้ (a^m)^n = (3^2)^2 ซึ่งเท่ากับ (3•3)^2 = (3•3)•(3•3)
เห็นได้ว่า 3 คูณกัน 4 ครั้งหมายถึง 3^4ซึ่ง 2•2 = 4 ตามสมบัติ

3.2) ซ้อนกันแบบไม่มีวงเล็บ เช่น a^m^ n จะต้องทำจากบนลงล่าง ซึ่งมีลำดับขั้นตอนคือ a^m^n = a^(m^n) = a^y เมื่อ m^n=y

ลองทำดู! ความแตกต่างระหว่างมีวงเล็บและไม่มีวงเล็บ

1) 4^3^2

2)(3^ 3)^2

3)(5^2)^5

4)2^2^2^2

5)(3^ 3)^(3^ 3)

สมบัติเลขยกกำลังหน้าที่ 4

4) จำนวนใดๆบนโลกนี้หากมีเลขชี้กำลังเป็น 0 จะมีค่าเท่ากับ 1 เสมอ ยกเว้น เลขยกกำลังที่มีฐานและชี้กำลังเป็น 0 จะมีค่าเป็น infinity ในเชิงวิทยาศาสตร์สาขาคำนวณ แต่จะไม่มีความหมาย หรือไม่นิยามในทางคณิตศาสตร์

บทพิสูจน์คือ เมื่อเราแทน a เป็นจำนวนใดๆบนโลกนี้ที่ไม่เท่ากับ 0 และมีเลขชี้กำลังเป็นศูนย์
จะได้ a^0 สมมติว่า เมื่อแทน 0 = 2-2
จะได้ a^(2-2)
ใช้สมบัติฐานเท่ากันหารกันเลขชี้กำลังลบกัน จะได้
a^(2-2)=a^2/a^2 สังเกตได้ว่าตัวเศษและตัวส่วนจะเหมือนกัน และตัดกันเหลือ 1ดังนั้น บทสรุปสุดท้าย คือ a^0 = 1

ถ้าแทน a ด้วย 0 จะเป็นอย่างไร? จาก a^0=a ^(2-2)=a^2/a^2
จะเป็น 0^0=0^(2-2)=0^2/0^2=0/0
พิจารณา a/b = c จะได้ bc = a
ถ้า 0/0 = 0 จะได้ 0•0=0 สมการถูกต้อง
แต่ถ้า สมมติ 0/0=7 จะได้ 0•7=0 สมการถูกต้องเช่นกัน
เห็นได้ส่า ผลลัพธ์ของ 0/0 เป็นได้ทุกตัวเลขดังนั้นจึงไม่นิยามทางคณิตศาสตร์ แต่ไม่ว่าตัวตั้งจะเป็นจำนวนใดๆที่ไม่เท่ากับ 0 การหารด้วย 0 ก่อให้เกิด Error ทางคณิตศาสตร์มากมาย เช่น 7=0 ดังนั้นการหารที่ตัวหารเป็น 0 จึงไม่นิยามทางคณิตศาสตร์

5) ฐานไม่เท่ากัน ถ้าเป็นการดำเนินการโดยการคูณสามารถกระจายเลขชี้กำลังให้เท่ากันได้ หรือ (m•n)^x = m^x•n^x

จดเพิ่ม โจทย์ที่เกี่ยวข้องกับสมบัติพื้นฐานของเลขยกกำลัง

3.3 สัญกรณ์ทางวิทยาศาสตร์

เป็นภาษาหนึ่งในวงการนักวิทยาศาสตร์ที่ใช้เขียนแทนจำนวน
ที่มีขนาดใหญ่มาก ในรูปของเลขยกกำลัง เช่น 350 เมตร แทนด้วย
3.5•10^2

3.3.1 วิธีเขียนสัญกรณ์ทางวิทยาศาสตร์

สัญกรณ์ทางวิทยาศาสตร์ จะอยู่ในรูป A•10^n
โดยที่ 1=<A<10 และ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ

หลักการ
Ex) 0.000685
ให้ A = 6.85 โดยนับจุดทศนิยมจากจุดเดิมไปยังจุดระหว่าง 6
และ 8 ซึ่งนับไปทางขวา 4ทำให้เลขชี้กำลังติดลบ 4
0.000685 = 6.85•10^(-4)

แบบฝึกหัด ลองฝึกคิด เขียนสัญกรณ์วิทย์ให้เป็น

56.25

1345.112

0.00005555

3.3.2 ระบบหน่วยทางฟิสิกส์ที่เกี่ยวกับเลขยกกำลัง
และสัญกรณ์ทางวิทยาศาสตร์

หน่วยทางฟิสิกส์มีหลากหลายลักษณะ โดยหลักๆคือการผสม
และการแปลงหน่วยโดยพึ่งพาการคำนวณทางคณิตศาสตร์
โดยเน้นที่สมบัติพื้นฐานของเลขยกกำลังหรือสัญกรณ์ฯ

3.3.2.1 หน่วยทางฟิสิกส์ที่เกี่ยวข้องกับสมบัติเลขยกกำลัง
พื้นฐานของหัวข้อนี้คือ หน่วยทางฟิสิกส์ 3 แบบ ซึ่งได้แก่

1.หน่วยฐาน

2.หน่วยเสริม

3.หน่วยอนุพันธ์

สมบัติเลขยกกำลังหน้าที่ 8

ลองทำดู ผสมหน่วยฟิสิกส์ด้วยความรู้คณิตศาสตร์!

จากสูตรฟิสิกส์ที่กำหนดให้ จงหาหน่วยของตัวที่กำหนด

W = mg หาหน่วยของ W

F = ma จงหาหน่วยของ F

c = (e/m)^0.5

จากการทดลองพบว่าอัตราเร็ว v ของคลื่นในเส้นเชือดขึงตึงนั้นขึ้นอยู่กับแรงตึง T ในเส้นเชือก และค่ามวลต่อหน่วยความยาว μ ในลักษณะที่เป็นฟังก์ชันเลขยกกำลัง v = kT^a•μ^b เมื่อ k คือค่าคงตัวการแปรผัน เลขชี้กำลัง a และ b มีค่าเท่าใด (IJSO 60)

สมบัติเลขยกกำลังหน้าที่ 9

3.3.2.2 การแปลงหน่วยในระบบหน่วยทางฟิสิกส์

รู้จัก “Prefix” ในหน่วยทางฟิสิกส์

Common Prefixes used with SI Units			
Prefix	Symbol	Meaning	Order of Magnitude
giga-	G	1 000 000 000	10^9
mega-	M	1 000 000	10^6
kilo-	k	1 000	10^3
hecto-	h	100	10^2
deka-	da	10	10^1
	base unit	1	10^0
deci-	d	0.1	10^{-1}
centi-	c	0.01	10^{-2}
milli-	m	0.001	10^{-3}
micro-	μ	0.000 001	10^{-6}
nano-	n	0.000 000 001	10^{-9}

ตัวอย่างหลักการ
เช่นวันหนึ่งเราอ่านป้ายว่าอีก 3 กิโลเมตร จริงๆคือ
3•10^3เมตรเพราะ กิโลคือ 10^3
หรือนักวิทยาศาสตร์ใช้กล้องจุลทรรศน์ส่องสิ่งมีชีวิต
3 ไมครอนจริงๆคือ 3•10^(-6) เมตร เพราะ ไมครอนหรือไมโคร
คือ 10^(-6)

หลักการแปลง Prefix เบื้องต้น

1.Prefix อยู่ซ้ายเอาไปคูณ
Ex) 3.2 กิโลเมตร คิดเป็น กี่เมตร
3.2 km = ? m
3.2 km = 3.2•10^ 3 m

2.Prefix อยู่ขวาเอา Prefix หาร
Ex) 56.112 เมตรคิดเป็นกี่นาโนเมตร
56.112 m = ? nm
56.112 m = 56.112/10^(-9)
= 56.112•10^9
= 5.6112•10^10

3.Prefix อยู่ทั้งซ้ายและขวา ก็สองอย่างรวมมิตรซะ!
Ex) 1234 เทระเมตรคิดเป็นกี่นาโนเมตร
1234 Tm = ? nn
1.234•10^ 3 Tm = 1.234•10^ 3•10^12/10^(-9) nn
= 1.234•10^ 3•10^12•10^9
= 1.234•10^(3+12+9)
= 1.234•10^24

สมบัติเลขยกกำลังหน้าที่ 11

แปลงหน่วยฟิสิกส์เก่ง ด้วยความรู้เลขยกกำลัง

0.0132 เทระเมตรติดเป็นกี่เมตร

342 นาโนเมตรคิดเป็นกี่เมตร

23.1 เมกะเมตรคิดเป็นกี่กิโลเมตร

1.09 ตารางกิโลเมตรคิดเป็นกี่ตารางไมครอน

5.0967 ลูกบาศก์เทระเมตรคิดเป็นกี่ลูกบาศก์นาโนเมตร

แนวโจทย์ประยุกต์ของพหุนามผสมเลขยกกำลัง

(POSN) a+b+c = 1 , a^2+b^2+c^2 =11 และ abc = 2
แล้ว a^4+b^4+c^4 มีผลลัพธ์เป็นเท่าใด

(POSN 65) a b c เป็นจำนวนจริงบวกซึ่งสอดคล้องกับสมการ $2^a = 3^b = 216^c$ แล้ว $ab/(bc+ca)$ เป็นเท่าใด

สมบัติเลขยกกำลังหน้าที่ 14

2^P = A , A^C = B, B^S = D , D^H = E , E^S = 16
แล้ว (PCSHS)^1.5 มีค่าเท่าใด

2.4 ฟังก์ชั่นกรณฑ์ที่ n

2.4.1 นิยามและความหมาย
จำนวนที่อยู่ในกรณฑ์ที่ n จะมีความหมายว่าจำนวนที่เป็นรากที่ nของจำนวนที่อยู่ในนั้น มีผลลัพธ์เป็นตัวฐานที่มี n เป็นเลขชี้กำลัง
เช่น $\sqrt[4]{16}$ แปลว่า รากที่ 4 ของ 16 = 2
เนื่องจาก2^4 = 16 มี 2 เป็นฐานและ 4 เป็นเลขชี้กำลัง

2.4.2 หลักการถอดรูท (กรณฑ์)

1) ถอดได้ -> ถอดซะ ผลลัพธ์เป็นตำนวนตรรกยะเสมอ

2) ถอดไม่ได้ -> ถอดให้สุดโดยใช้กาีแยกตัวประกอบแล้วรวมตัวเหมือนกันเป็นระบบเลขยกกำลัง พจน์ที่มีเลขชี้กำลังเท่ากับ n เมื่อการคำนวณนั้นเป็นการคำนวณกรณฑ์ที่ n สามารถดึงเลขนั้นออกมานอกกรณฑ์ได้แต่มีเลขชี้กำลังเป็น 1

2.4.3 สมบัติพื้นฐาน

$\sqrt[n]{a} = m$ เมื่อ $m^n = a$

$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^m}$ เมื่อ $n \neq 0$

$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

สมบัติเลขยกกำลังหน้าที่ 17

จดเพิ่มเติมแนวข้อสอบบทที่ 3

เพิ่มเติม ถ้าเวลาเหลือ

การเปลี่ยนแปลงมุมมองต่อสิ่งต่างๆ
ทำให้เรามองสิ่งนั้นต่างจากเดิม

Max Plank
(นักฟิสิกส์ชาวเยอรมัน ผู้บุกเบิกการศึกษา
ทฤษฎีควอนตัม และค่าคงตัวพลังค์)